OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
26 ianuarie 2013

CLASA A X-A
Programa TC+CD (4 ore)

1.) Fie z_1 şi z_2 numere complexe distincte, astfel încât $|z_1| = |z_1 + z_2| = |z_2|$.

Calculaţi valoarea expresiei: $E = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2013}$

2.) Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Arătaţi că:

a) $\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 6$

b) $\log_a \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \log_b \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + \log_c \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 6$

3.) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care, verifică relaţia

$f(x^2) + f(x+1) = x(x+1)(x^2 - x - 1) + 1$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că funcţia f nu este injectivă.

b) Daţi un exemplu pentru funcţia f, care verifică realţia dată.

4.) În planul compex se dau punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ale căror afixuri sunt numerele complexe $z_0 = 1$, $z_1 = 2(\cos t + i \sin t)$, $z_2 = 2^2(\cos 2t + i \sin 2t)$, $z_n = 2^n(\cos nt + i \sin nt)$, ….

a) Determinaţi valoarea $t \in [0, \pi]$ pentru care triunghiul $A_0A_1A_2$ este dreptunghic în A_0.

b) Pentru $t = \frac{2\pi}{3}$ calculaţi în funcţie de n aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore